الفصل السابع

الارتشاح المستوي المستقر- تداخل الآبار

تتلخص ظاهرة تداخل الآبار (التأثير المتبادل بين الآبار) في أنه عند وضع البئر في الانتاج أو إيقافه أو تغيير نظام الاستثمار لمجموعة ما من الآبار ، فإن الانتاجية والضغط سوف يتغيران لمجموعة أخرى من الآبار التي تنتج من نفس الطبقة المنتجة .

فالإنتاج الإجمالي للآبار الجديدة الداخلة في الإنتاج والواقعة تحت نفس الشروط سيزداد بشكل أبطأ من زيادة عدد الآبار الداخلة في الإنتاج . هذا مايوضحه الشكل (٧-١) ، حيث يتم تأثير متبادل من جديد مابين الآبار القديمة والجديدة ، وهذا التأثير المتبادل هو ما يسمى بتداخل الآبار ، وقبل أن ندخل في بحث هذه الظاهرة لابد لنا من أن نشرح بعض المفاهيم الضرورية بالإضافة إلى استخراج المعادلات التفاضلية للجريان المستقر من أجل السائل غير القابل للانضغاط حسب قانون دارسي على أساس الاستمرارية ومعادلة الحركة ومعادلة حالة السوائل في الوسط المسامي .

شكل (٧-١) علاقة الإنتاجية الكلية للمكمن النفطي بعدد الآبار

إن مجموعة النقاط الواقعة على محور عمودي واحد والتي تحاط بالسائل من جميع الجهات تدعى البئر النقطي ، فالبئر النقطي يمثل بئراً تاماً هيدروديناميكياً ذا قطر ينتهي إلى الصفر والذي يخترق طبقة ذات سماكة ثابتة ،وسوف تتم الحركة الشعاعية حول هذا البئر ، أما النقطة التي

تقوم بالتغذية بالسائل تسمى المنبع النقطي (مثلاً آبار الحقن) .

٧-١ – مبدأ دراسة تداخل الآبار :

إن معادلة الاستمرارية ستأخذ الشكل التالي دون الأخذ بعين الاعتبار تشوه الوسط المسامي ($m = const$ ، $\rho = const$) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (٧-١)$$

ومعادلة الحركة المستقرة للسائل حسب قانون دارسي كما تم الحصول عليها سابقاً ، والممثلة بالمعادلات (٣-٢٠) ، ومنها يمكن الحصول على ما يلي :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2},\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \qquad (٧-٢)$$

نعوض هذه القيم بالمعادلة (٧-١) فنجد :

$$-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = 0$$

ومنه :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0 \qquad (٧-٣)$$

أو يمكن أن يعبر عن ذلك كمايلي :

$$\nabla^2 P = 0 \quad \text{أو} \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} P = 0 \qquad (٧-٤)$$

إن المعادلة (٧-٣) تمثل المعادلة التفاضلية للارتشاح المستقر للسائل حسب قانون دارسي ضمن وسط مسامي غير قابل للتشوه والتي تدعى معادلة لابلاس .

وفي نظرية الارتشاح من المناسب والأسهل استخدام الدالة $\phi(x, y, z)$ والتي تدعى كمون سرعة الارتشاح والتي تحسب بالمعادلة التالية :

$$\phi = v \,.\, \Delta L = \frac{k}{\mu}(P + \rho g z) \qquad (٧-٥)$$

وإذا وضعنا هذه الدالة في معادلة الحركة سيمكننا كتابة مايلي :

$$v_x=-\frac{\partial \phi}{\partial x}\ ,\ v_y=-\frac{\partial \phi}{\partial y}\ ,\ v_z=-\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (٧-٦)$$

وهكذا فإن الدالة $\phi\,(x, y, z)$ تدعى كمون سرعة الارتشاح لها قيمة معاكسة للسرعة ومساوية لسرعة الارتشاح على طول المسار $v\,(x, y, z)$.

لدى مفاضلة المعادلة السابقة ، ووضع قيم سرعة الارتشاح في معادلة الاستمرارية فإننا سنحصل على :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (٧-٧)$$

وهذا يعني أن كمون سرعة الارتشاح يحقق معادلة لابلاس كما يحققها الضغط. فالدلائل $P\,(x, y, z)$ و $\phi\,(x, y, z)$ التي تحقق معادلة لابلاس تعتبر مستمرة التي لها المشتق الأول والثاني ، حيث تدعى متوافقات .

إن حل معادلة لابلاس يملك بعض الخصائص كما هو بالنسبة إلى حل المعادلات التفاضلية المتجانسة تتمثل بما يلي :

١) مجموع الحلول الحاصلة تعني حلول هذه المعادلة .

٢) إن تطابق الحل المحصول عليه مع ثابت عشوائي يعني أيضاً حلاً لهذه المعادلة .

فمثلاً لدينا P_1 ، P_2 ، ....P_n التي تعتبر حلول للمعادلة (٧-٣) فإن المجموع التالي سوف يحقق المعادلة (٧-٣) :

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i\, P_i \qquad (٧-٨)$$

حيث إن C_i - ثوابت .

إن هذه الخصائص تقود إلى مبدأ التراكب (التطابق) الذي يستخدم بشكل واسع عند حل المسائل المختلفة في هيدروليك الموائع الجوفية والذي ينسب إلى معادلة لابلاس .

سنقوم باستخراج قيمة الكمون (ϕ) للبئر النقطي وذلك على امتداد الطبقة ، حيث إن البئر النقطي يعتبر نموذجاً للآبار الإنتاجية ، والجريان حولها سيعتبر جرياناً دائرياً شعاعياً وبالتالي يمكن استخدام معادلة سرعة الارتشاح من أجل هذا النوع من الجريان :

$$v = \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ell n \frac{R_k}{R_c}} . \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi h} . \frac{1}{r} = \frac{q}{2\pi r} \qquad (٧-٩)$$

حيث إن : $q = \frac{Q}{h}$ إنتاجية البئر النقطي لكل ١ م من سماكة الطبقة . ولكن من أجل الجريان الدائري الشعاعي سيكون :

$$v = - \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dr} \Rightarrow d\phi = vdr = \frac{q}{2\pi} \frac{dr}{r} \qquad (٧-١٠)$$

وبإجراء التكامل سنحصل على معادلة الكمون للبئر النقطي وذلك على امتداد الطبقة :

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ell n \, r + C \qquad (٧-١١)$$

حيث إن C ـ ثابت التكامل .

وهكذا فإن الكمون (ϕ) سيتناسب طرداً مع لوغاريتم البعد r عن البئر النقطي (مركز البئر).فمن أجل $r = 0$ أو $r = \infty$ فإن $\ell n \, r$ ستكون لانهائية وبالتالي سيفقد ϕ معناه . ومن أجل المنبع النقطي فإنه يمكن استخدام المعادلات السابقة ، ولكن الإنتاجية q ستصبح أصغر من الصفر ($q < 0$) . ومن المعادلة (٧-١١) نجد أن ϕ ثابتة عندما $r = \text{cons t}$.

ومن أجل الجريان الكروي الشعاعي سنوجد قيمة الكمون ϕ في الفراغ :

$$v = \frac{Q}{4 \pi r^2} = \frac{d\phi}{dr} \Rightarrow$$

$$d\phi = \frac{Q}{4 \pi} \frac{dr}{r}$$

ومنه :

$$\phi = - \frac{Q}{4 \pi r} + C \qquad (٧-١٢)$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن (ϕ) مرتبطة عكسياً مع الإنتاجية Q ، وأن كمون البئر النقطي في الفراغ سيكون لانهائياً عندما $r = 0$ ومساوياً (C) عندما يكون $r=\infty$ ومثل هذه الحالة تستخدم عند دراسة الآبار غير التامة هيدروديناميكياً .

يجب الإشارة هنا إلى أن طريقة المنابع والآبار النقطية مريحة ، حيث أنها لاتستخدم في حل مسائل الارتشاح فقط بل أيضاً في المسائل المتعلقة بحركة الأجسام الصلبة المختلفة ضمن تيار السائل ، كذلك في مسائل نظرية انتقال الحرارة والكهرباء والمغناطيسية .

بناء على خواص نظرية لابلاس التي تصف توزع الضغط والكمون في الجريان المستقر للسائل في الطبقة ، فقد تم وضع طريقة لحل المسائل الهيدروديناميكية المعقدة في هيدروليك الموائع الجوفية والتي دعيت بالتراكب (التطابق) .

إن الفكرة الرياضية لطريقة التطابق تتلخص في أنه عندما يوجد لدينا عدة جريانات ارتشاحية ذات كمونات مختلفة $\phi_1(x, y, z)$ ، $\phi_2(x, y, z)$ ، ...... ، $\phi_n(x, y, z)$ وكل كمون يحقق معادلة لابلاس أي أن :

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2}=0 \; : \; i=1,2,\ldots,n \qquad (١٣-٧)$$

فإن المجموع التالي سيحقق معادلة لابلاس أيضاً :

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} C_i \, \phi_i \qquad (١٤-٧)$$

حيث إن C_i - ثابت عشوائي . كذلك فإن قيم C_i ضمن مجموع الكمون سوف تحقق كافة الشروط الحدية .

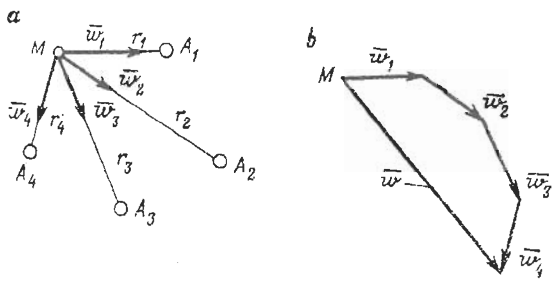
إن الفكرة الهيدروديناميكية في طريقة التطابق تتلخص في أن تغير الضغط والكمون في أية نقطة من الطبقة ، والتي تقع ضمن مجال تأثير كل بئر (بئر إنتاجي ، أو بئر حقن) ، جبرياً سوف تجمع وتنسب إلى نقطة معينة في الطبقة . هذا يعني أن السرعة الإجمالية للارتشاح يمكن اعتبارها مجموع القيم الموجهة لسرعة الارتشاح التي تتولد تحت تأثير كل بئر .

لنفرض أنه لدينا مستوى لانهائي الامتداد موزعة عليه (n) من المنابع والآبار النقطية (شكل " ٧-٢ ") ، فإن كمون كل منها في النقطة M يمكن تحديدها بالمعادلة التالية :

$$\phi_1 = \frac{q_1}{2\pi} \ell n \, r_1 + C_1 \, , \; \phi_2 = \frac{q_2}{2\pi} \ell n \, r_2 + C_2$$

$$\phi_n = \frac{q_n}{2\pi} \ell n\, r_n + C_n \qquad (١٥-٧)$$

حيث إن r_1 ، r_2 ، .... ، r_n - البعد بين البئر النقطي الأول والثـاني ، وذو الرقـم (n) والنقطة M ، C_1 ، C_2 ، .... ، C_n - ثوابت .



شكل (٧-٢) مخطط سرعات الارتشاح في النقطة M عند عمل الآبار والمنابع النقطية الواقعة على مستوى لامتناهي في الامتداد (a) والسرعة الكلية الناتجة في النقطة M (b) .

إن القيم ϕ_1 ، ϕ_2 ، .... ، ϕ_n تحقق معادلة لابلاس . وبالتالي فإن مجموع هذه القيم سيحقق معادلة لابلاس أيضاً :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \ldots .\ \phi_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} q_i \ell n\, r_i + C_i \qquad (١٦-٧)$$

حيث إن $C = C_1 + C_2 + \ldots . + C_n$.

وهذا يعني فيزيائياً أن الجريانات الارتشاحية لكل منبع أو بئر ستتداخل مع بعضها البعض ، وهذا يعني تحقيق مبدأ التراكب (التطابق) ، وبالتالي سيصبح الجريان أكثر تعقيداً .

تعطى سرعة الارتشاح $\vec{w}$ في النقطة M كما في الشكل (٧-٢- b) بالمعادلة التالية :

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots .. + \vec{w}_n \qquad (١٧-٧)$$

حيث إن :

$$\vec{w}_1 = \frac{q_1}{2\pi r_1}\ ,\ \vec{w}_2 = \frac{q_2}{2\pi r_2}, \ldots ..$$

$$\vec{w}_n = \frac{q_n}{2\pi r_n} \qquad (١٨-٧)$$

لاتستخدم طريقة التطابق في الطبقات غير المحدودة امتداداً فقط ، بل وفي الطبقات المحدودة بكونتور تغذية أو بطبقات كتيمة . ولكن يجب الأخذ بعين الاعتبار آبار الإنتاج وآبار الحقن الواقعة خارج حدود الطبقة .

كذلك تستخدم طريقة التمثيل ، حيث نفترض آبار وهمية وآبار حقيقية ومهمتنا هي الأخذ بعين الاعتبار هذه الآبار جميعاً .

لنبحث الآن استخدام نظرية التطابق والتمثيل لآبار الإنتاج والحقن في المسائل التي تهتم بالاستخدام العملي لنظرية استثمار المكامن النفطية والغازية .

٧-٢- تدفق السائل إلى مجموعة من الآبارعند وجود خط كونتور بعيد للتغذية :

لنفرض أن مجموعة من الآبار A_1 ، A_2 ، .....A_n موزعة على امتداد طبقة أفقية سماكتها b ، ذات الأقطار r_{ci} والعاملة بكمونات قاعية ϕ_{ci} ،حيث إن $i = 1,2,3,....n$ كما في الشكل (٧-٣) ، والمسافة مابين مراكز الآبار الواقعة في الصف (i) عنها في الصف (j) معروفة $(r_{ij} = r_{ji})$ ،مع اعتبار أن كونتور التغذية يقع على مسافة بعيدة عن الآبار ، حيث يمكن اعتبار R_k هي المسافة مابين كونتور التغذية والآبار جميعاً ، وأن الكمون ϕ_k عند كونتور التغذية معروف مسبقاً ، والمطلوب تحديد إنتاجية كل بئر وسرعة الارتشاح في أية نقطة ما من الطبقة .

يحدد الكمون في النقطة M من الطبقة ، بالمعادلة (٧-١٦) ولنفرض أن النقطة M تنتقل من قعر بئر إلى آخر بالتتالي ، فنستطيع أن نكتب :

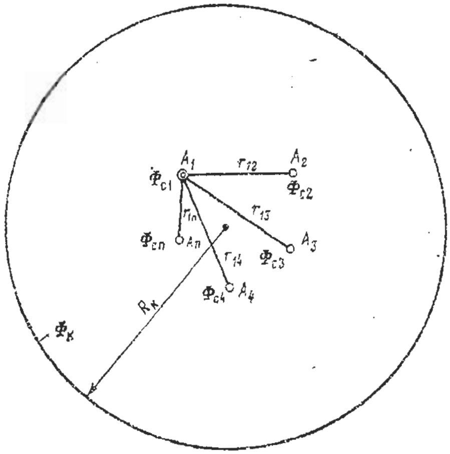
$$\phi_{c1} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n\, r_{11} + q_2 \ell n\, r_{12} + q_3 \ell n\, r_{13} + \ldots + q_n \ell n\, r_{1n}\right) + C$$

$$\phi_{c2} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n\, r_{21} + q_2 \ell n\, r_{22} + q_3 \ell n\, r_{23} + \ldots + q_n \ell n\, r_{2n}\right) + C$$

(٧-١٩)

....

$$\phi_{cn} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n\, r_{n1} + q_2 \ell n\, r_{n2} + q_3 \ell n\, r_{n3} + \ldots + q_n \ell n\, r_{cn}\right) + C$$



شكل (٧-٣) مخطط مجموعة من الآبار المخترقة لطبقة مع كونتور بعيد التغذية

إن المسافة مابين جدار بئر ما ومركز البئر الآخر يساوي تقريباً المسافة مابين مركزي هذين البئرين ، أي أن $r_{ij} >> r_{ci}$ حيث إن $i \neq j$.

تتألف مجموعة المعادلات (٧-١٩) من (n) معادلة وتحتوي على (n + 1) متغير (n بئر إنتاجي ، C ـ ثابت التكامل) . وعند وضع النقطة M على كونتور التغذية سنحصل على المعادلة الإضافية التالية :

$$\phi_k \cong \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n\, R_k + q_2 \ell n\, R_k + \ldots\ldots q_n \ell n\, R_k\right) + C \qquad (٧-٢٠)$$

وبحل مجموع المعادلات (٧-١٩) مع المعادلة (٧-٢٠) ، يمكن حذف الثابت C والحصول على (n) معادلة . وبحل هذه المعادلات الأخيرة سنحصل على إنتاجية الآبار q_1 ، q_2 ...... q_n وذلك عندما يعطى للكمون القيم التالية ϕ_{c1} ، ϕ_{c2} ، ...... ϕ_{cn} . وكذلك ϕ_k كما يمكننا الحصول على الكمونات ϕ عند إعطاء قيم معينة للإنتاجية q_i حيث إن : $i = 1,2,3,...n$

$$\phi_k - \phi_{c1} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n \frac{R_k}{r_{c1}} + q_2 \ell n \frac{R_k}{r_{12}} + \ldots + q_n \ell n \frac{R_k}{r_{1n}} \right)$$

$$\phi_k - \phi_{c2} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n \frac{R_k}{r_{21}} + q_2 \ell n \frac{R_k}{r_{c2}} + \ldots + q_n \ell n \frac{R_k}{r_{2n}} \right)$$

....

$$\phi_k - \phi_{cn} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ell n \frac{R_k}{r_{n1}} + q_2 \ell n \frac{R_k}{r_{n2}} + \ldots + q_n \ell n \frac{R_k}{r_{cn}} \right) \quad (٢١-٧)$$

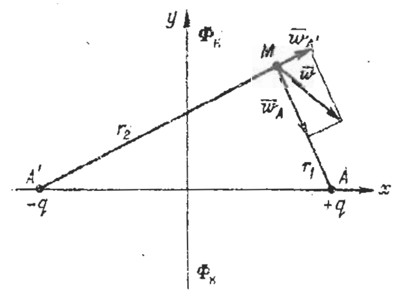
أما سرعة الارتشاح $\vec{w}$ في النقطة M من الطبقة ستحدد هندسياً بمجموع سرع الارتشاح الناتجة عند كل بئر ، أي أن :

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \ , \ w_i = \left| \vec{w}_i \right| = \frac{q_i}{2 p r_i} \quad (٢٢-٧)$$

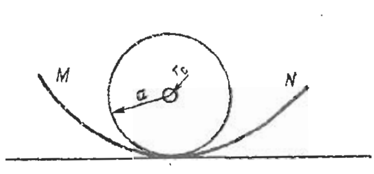
حيث إن : $\vec{w}_i$ موجهة قطرياً من النقطة M إلى البئر المحدد ، وإذا كان لدينا عشرات أو مئات من الآبار العاملة ، فمن الواضح بأنه يجب وضع عشرات ومئات من هذه المعادلات ، لذلك لابد هنا من استخدام الحاسب الألكتروني .

٧-٣- جريان السائل إلى البئر عند وجود خط كونتور مستقيم :

ليكن لدينا طبقة نصف محدودة بخط كونتور للتغذية ، والكمون عند خط كونتور التغذية ϕ_k ، وقد اخترق هذه الطبقة بئر واحد A ذو كمون قاعي ϕ_c كما في الشكل (٧-٤) ، والمطلوب تحديد إنتاجية هذا البئر q والكمون وسرعة الارتشاح في أية نقطة من الطبقة .



شكل (٧-٤) مخطط جريان السائل إلى البئر ضمن طبقة ذات خط كونتور مستقيم



شكل (٧-٥) مخطط الطبقة ذات خطوط كونتور مختلفة

فإذا كانت الطبقة غير محدودة أو أن كونتور التغذية كان دائرياً وفي مركزه يوجد بئر ، فإن الكمون في أية نقطة من الطبقة يمكن أن تحسب بالمعادلة (٧-١١)، عندئذ فإن الكمون عند كونتور التغذية ذو الشكل المستقيم سيكون غير ثابتٍ ، حيث إن المسافة r لنقاط مختلفة من كونتور التغذية عند البئر A غير متساوية .

سنقوم باستخدام طريقة تمثيل آبار الإنتاج والحقن من أجل حل هذه المسألة ، حيث سنفترض أنه لدينا مرآة منطبقة على كونتور التغذية ، وأن 'A هو صورة أو منعكس للبئر A والذي سندعوه ببئر التمثيل ، وسنعتبر أن هذا البئر هو بئر للحقن . والآن سنبحث عمل هذين البئرين معاً وسنفرض أن إنتاجية البئر A هي q+ ، أما إنتاجية بئر الحقن هي q- ، عندئذ فإن الكمون في أية نقطة من الطبقة الموجودة على مسافة r_1 من البئر A و r_2 عن البئر 'A :

$$Q_M = \frac{+q}{2\pi}\ell n\, r_1 + \frac{-q}{2\pi}\ell n\, r_2 + C = \frac{q}{2\pi}\ell n\, \frac{r_1}{r_2} + C \qquad (٧-٢٣)$$

وهكذا فإن الكمون عند كونتور التغذية سيكون عندما $r_1 = r_2$:

$$\phi = C = \phi_K \qquad (٧-٢٤)$$

يعني هذا أن الكمون عند كونتور التغذية سيكون ثابتاً ، ومنه فإن الكمون القاعي للبئر A عندما $(r_2 = 2a \text{ ، } r_1 = r_c)$ سيكون مساوياً :

$$\phi_c = \frac{q}{2\pi}\ell n\, \frac{r_c}{2a} + \phi_k = \phi_k - \frac{q}{2\pi}\ell n\, \frac{2a}{r_c} \qquad (٧-٢٥)$$

ومن المعادلة السابقة يمكن حساب إنتاجية البئر A لكل متر واحد من سماكة الطبقة كما يلي :

$$q = \frac{2\pi\,(\phi_k - \phi_c)}{\ell n\, \frac{2a}{r_c}} \qquad (٧-٢٦)$$

إن شكل كونتور التغذية MN كما في الشكل (٧-٥) في الشروط الحقلية يكون عادة غير معروف ، ولكنه يأخذ شكلاً يقع مابين الدائري والمستقيم ، وبالتالي

فإن إنتاجية الآبار في مثل هذه الشروط سيقع ضمن الحدود التالية :

$$\frac{2\pi\left(\phi_k-\phi_c\right)}{\ell n\frac{a}{r_c}} \geq q \geq \frac{2\pi\left(\phi_k-\phi_c\right)}{\ell n\frac{2a}{r_c}} \qquad (\text{٧-٢٧})$$

تستخدم المعادلة (٧-٢٣) من أجل تحديد الكمون في أية نقطة معينة M كما في الشكل (٧-٤) مع الأخذ بعين الاعتبار المعادلة (٧-٢٤) :

$$\phi_M = \frac{q}{2\pi}\ell n\frac{r_1}{r_2}+\phi_k \qquad (\text{٧-٢٨})$$

أما سرعة الارتشاح ستكون مساوية هندسياً لمجموع السرع الناتجة عن عمل آبار الإنتاج الحقيقية A وآبار الحقن التمثيلية 'A كما في الشكل (٧-٤) :

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{w}_{A'} \qquad (\text{٧-٢٩})$$

حيث إن : $w_A = \frac{q}{2\pi r_1}$ والمتجهة باتجاه البئر A .

$w_{A'} = \frac{q}{2\pi r_2}$ والمتجهة من البئر 'A

أما سرعة الارتشاح عند كونتور التغذية $(r_1 = r_2)$ ستكون عمودية عليه .

من المعادلة (٧-٢٨) يمكن الحصول على نقاط تساوي الكمون :

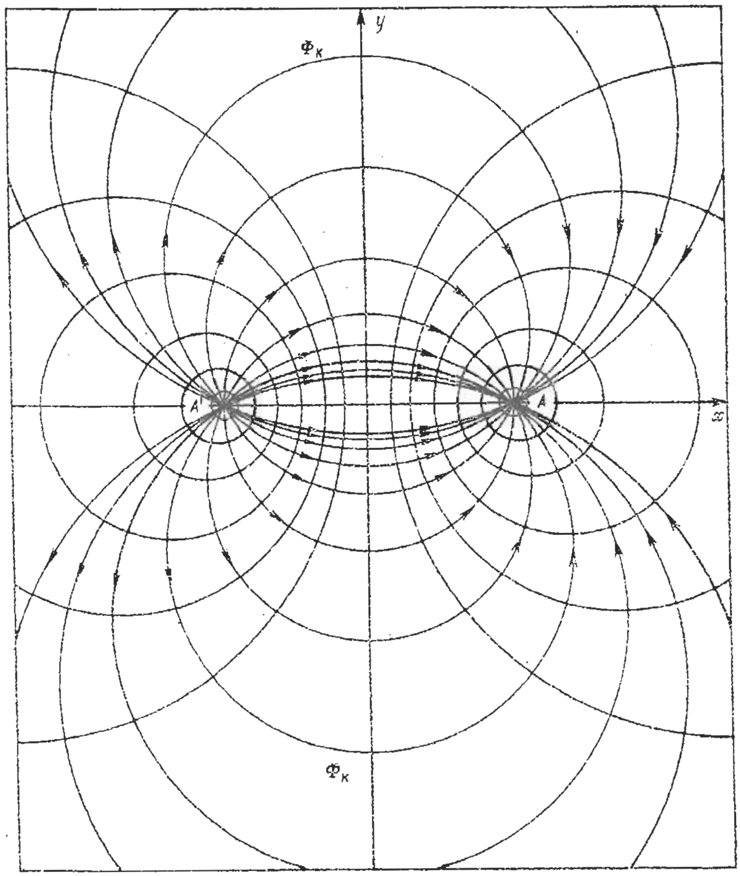
$$\frac{r_1}{r_2} = \text{const} \text{ ، } \frac{r_1^2}{r_2^2} = C^2 \qquad (\text{٧-٣٠})$$

فإذا تم التعبير عن r_2^2 ، r_1^2 من خلال إحداثيات النقطة $M(x, y)$ ، ومراكز الآبار $A(a, 0)$ ، $A'(-a, 0)$ فإنه يمكن كتابة مايلي :

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= (x-a)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x+a)^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{٧-٣١})$$

وبالتالي فإن المعادلة (٧-٣٠) ستمثل معادلة دائرة يقع مركزها على المحور x ، وعند تغيير قيمة الثابت C^2 فإننا سنحصل على نقاط تساوي الكمون الواقعة على دوائر ذات أقطار مختلفة ويقع مركزها في نقاط مختلفة من المحور x . أما كونتور التغذية فيعبِّر عن نقاط تساوي الكمون الواقعة على ذات نصف قطر لانهائي .

أما مجموعة خطوط الجريان فتكون عبارة عن دائرة تمر من كلا البئرين الواقعين على خط الكونتور المستقيم نفسه كما في الشكل (٧-٦) ، عندئذ فإن نقاط تساوي الكمون (خطوط تساوي الإيزوبار) ستكون دائماً متعامدة مع خطوط الجريان .



شكل (٧-٦) مجموعة خطوط الجريان وخطوط تساوي الضغط عند جريان السائل إلى بئر اختراق طبقة ذات خط كونتور تغذية مستقيم .

٧-٤- جريان السائل إلى بئر مجاور لحدود الطبقة مع طبقة كتيمة :

يمكن مصادفة مثل هذه الحالة لدى توضع آبار الإنتاج عند حدود الطبقة المنتجة، في مثل هذه الحالة فإن بئر الإنتاج الحقيقي سيكون له منعكس أو خيال في مرآة ممثلة بحدود الطبقة . وبالتالي فإن إنتاجية الآبار المنعكسة ستمثل إنتاجية الآبار الحقيقية ،

وبالنظر إلى جريان السائل الى بـئرين متسـاويين بالإنتاجيـة ، فإنـه ليس مـن الصعـب اعتبار سرعة الارتشاح عند الحدود الكتيمة للطبقة موجهة على طول الحدود، هذا يعني أن الحدود تعتبر خطوطاً للجريان والارتشاح من خلاله معدوم .

تحدد إنتاجية الآبار في هذه الحالة بالمعادلة (٧-١٩) و (٧-٢٠) من أجل $n = 2$ في الطبقة ذات خط كونتور بعيد .

$$Q_c = \frac{q}{2\pi}(\ell n\, r_c + \ell n\ 2a) = \frac{q}{2\pi}\ell n\, r_c.2a \qquad (٣٢-٧)$$

$$Q_k = \frac{q}{2\pi}(\ell n\, R_k + \ell n\, R_k) = \frac{q}{2\pi}\ell n\, R_k^2 \qquad (٣٣-٧)$$

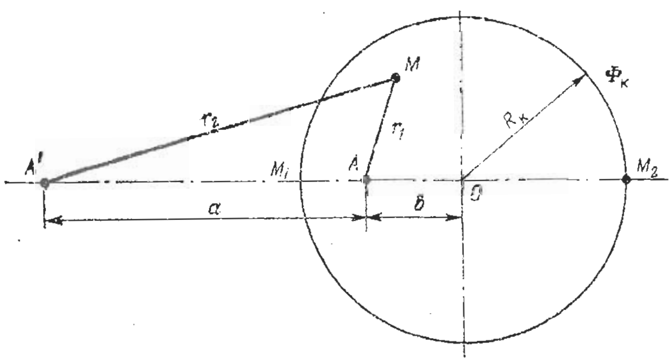
وبالتالي يمكن الحصول على ما يلي :

$$q = \frac{2\pi(\phi_k - \phi_c)}{\ell n \dfrac{R_k^2}{r_c.2a}} \qquad (٣٤-٧)$$

حيث إن $2\,a$ ـ المسافة مابين بئر الإنتاج الحقيقي والبئر المنعكس .

٧-٥- جريان السائل إلى بئر واقع في مركز طبقة دائرية :

لتكن لدينا طبقة سماكـتها b وذات كونتـور تغذية دائـري بنصـف قطـر R_k ، حيـث إن الكمون ϕ_k عند كونتور التغذية سيكون ثابتاً ، وعلى مسافة δ عن مركز الدائرة المشكلة من كونتور التغذية (o) يقـع بئر إنتـاجي A ذو كمـون قـاعـي ϕ_c كمـا في الشـكل (٧-٧) . والمطلوب إيجاد إنتاجية البئر q والكمون في أية نقطة من نقاط الطبقة .



شكل (٧-٧)مخطط جريان السائل إلى بئر يقع بشكل غير مركزي بالنسبة إلى كونتور التغذية الدائري

لنأخذ نظيراً للبئر A بالنسبة إلى كونتور التغذية،الذي يتمثل ببئر الحقن التمثيلي A' ، والواقع على مسافة (a) من بئر الإنتاج وعلى امتداد (oA) وذلك خارج كونتور التغذية . يمكن تحديد قيمة a من خلال كون الكمون عند كونتور التغذية ثابتاً R_k ثم يؤخذ الكمون في كلتا النقطتين M_2 ، M_1 الواقعتين على امتداد AA' وكونتور التغذية .

وباستخدام طريقة تطابق الكمون في هذه النقاط سنحصل على ما يلي :

$$\phi_{M_1} = \phi_k = \frac{q}{2\pi} \ell n\,(R_k - \delta) - \frac{q}{2\pi} \ell n\left[a - (R_k - \delta)\right] + C =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ell n\, \frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} + C \qquad (٧-٣٥)$$

$$\phi_{M_2} = \phi_k = \frac{q}{2\pi} \ell n\,(R_k + \delta) - \frac{q}{2\pi} \ell n(R_k + a + \delta) + C =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ell n\, \frac{R_k + \delta}{R_k + a + \delta} + C \qquad (٧-٣٦)$$

وبالتالي سنحصل على مايلي :

$$\frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} = \frac{R_k + \delta}{R_k + a + \delta}$$

ومنه :

$$a = \frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta} \qquad (٧-٣٧)$$

وهكذا ومن أجل تحديد إنتاجية البئر A سنكتب عبارة الكمون عند القاع :

$$\phi_A = \phi_c = \frac{q}{2\pi} \ell n\, r_c - \frac{q}{2\pi} \ell n\, a + C =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ell n\, \frac{r_c}{a} + C \qquad (٧-٣٨)$$

وبأخذ المعادلتين (٧-٣٥) ، (٧-٣٨) بعين الاعتبار نحصل على ما يلي :

$$\phi_k - \phi_c = \frac{q}{2\pi} \ell n\, \frac{(R_k - \delta)a}{\left[a - (R_k - \delta)\right] r_c} \qquad (٧-٣٩)$$

نعوض قيمة a من المعادلة (٧-٣٧) في المعادلة (٧-٣٩) نحصل على :

$$\phi_k - \phi_c = \frac{q}{2\pi} \ell n \frac{(R_k - \delta)\left(\frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta}\right)}{\left[\frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta}(R_k - \delta)\right] r_c} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ell n \frac{R_k^2 - \delta^2}{R_k \cdot r_c} = \frac{q}{2\pi} \ell n \left[\frac{R_k}{r_c}\left(1 + \frac{\delta^2}{R_k^2}\right)\right] \qquad (٧-٤٠)$$

وبالتالي يمكن تحديد الإنتاجية q :

$$q = \frac{2\pi(\phi_k - \phi_c)}{\ell n \left[\frac{R_k}{r_c}\left(1 + \frac{\delta^2}{R_k^2}\right)\right]} \qquad (٧-٤١)$$

عندما يقع البئر A في مركز الدائرة المشكلة من قبل كونتور التغذية ، أي $\delta = 0$ فإن المعادلة (٧-٤١) ستصبح معادلة ديوبي . إن الكمون في أية نقطة (M) والواقعة على مسافة r_1 من البئر A وعلى مسافة r_2 من البئر 'A فيمكن كتابة ما يلي :

$$\phi_M = \frac{q}{2\pi} \ell n\, r_1 - \frac{q}{2\pi} \ell n\, r_2 + C =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ell n \frac{r_1}{r_2} + C \qquad (٧-٤٢)$$

وبأخذ المعادلات (٧-٣٧) ، (٧-٣٨) بعين الإعتبار يمكن كتابة ما يلي :

$$\phi_M = \phi_c + \frac{q}{2\pi} \ell n \left[\frac{r_1}{r_2} \frac{(R_k^2 - \delta^2)}{r_c^2 . \delta}\right] \qquad (٧-٤٣)$$

كذلك يمكن حساب الكمون في النقطة M من المعادلة (٧-٤٢) مع الأخذ بعين الاعتبار المعادلتين (٧-٣٥) ، (٧-٣٦) :

$$\phi_M = \phi_k - \frac{q}{2\pi} \ell n \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{\delta}{R_k}\right) \qquad (٧-٤٤)$$

نلاحظ أن المعادلتين (٧-٤٣) ، (٧-٤٤) متماثلتان .

٧-٦- جريان السائل الى سلسلة غير منتهية وصف دائري من الآبار :

من أجل دراسة مثل هذا النوع من الجريان تستخدم طريقة المقاومات الارتشاحية المكافئة والتي تستخدم بشكل واسع عند تخطيط واستثمار المكامن النفطية . فقد